数理解析研究所講究録
959巻 1996年 51-58

有理函数の Fatou 成分の境界について

高知大 理
諸澤 俊介
Shunsuke MOROSAWA

0. Introduction.

f を有理函数とし，$F(f)$, $J(f)$ をそれぞれ f のファトウ集合，ジュリア集合とする．

§1. では subhyperbolic rational functions のファトウ成分の境界にあるジュリア集合の位相的性質について述べる．そして §2. では具体的な subhyperbolic rational functions の例について §1. で述べた結果を用いてそのジュリア集合を調べる．

1. Subhyperboli rational functions.

有理函数 f が subhyperbolic であるとは f の各分岐点の軌道が吸引周期に吸収されるか，または前周期的になるときをいう．subhyperbolic な有理函数には次の拡大性がある（[1] 参照）．

定理1． $\infty \notin J(f)$ とする．このとき f が subhyperbolic である必要十分条件は $J(f)$ のある近傍上に計量 $\sigma(z)|dz|$ と定数 $\lambda > 1$ で任意の $z \in J(f)$ に対して

$$\sigma(f(z))|f'(z)| \geq \lambda\sigma(z)$$

となるものが存在することである．

この拡大性を用いて次の定理の前半が示される．

補題2． f を subhyperbolic とし，D を $F(f)$ の単連結不変成分とし，D での f の局所次数を k とする．$S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$, $h(z) = z^k$ とおくとき S^1 から ∂D の上への連続写像 φ で

$$\varphi \circ h(z) = f \circ \varphi(z)$$

を満たすものが存在する．特に ∂D は局所連結である．さらに ζ が f の分岐点でなければ h は $\varphi^{-1}(\zeta)$ 上で単射であり，ζ が分岐点でその重複度が n のときは高々 $n+1:1$ となる．

さらに $J(f)$ が連結なときには次がいえる．

命題3． f が subhyperbolic であり，$J(f)$ が連結であるとする．このとき $J(f)$ は局所連結である．

上の補題2により D が単連結であれば ∂D が閉曲線になることがわかるが，それが Jordan curve になるかどうかは一般にはわからない．しかし，次のことがいえる．

補題4． ある N が存在して任意の $\zeta \in \partial D$ に対して $\sharp\{\varphi^{-1}(\zeta)\} \leq N$ となる．

D が完全不変成分であれば $\partial D = J(f)$ となるが，f が subhyperbolic であれば逆が成り立つ．すなわち

定理5． f を subhyperbolic とし，$J(f)$ が連結とする．$F(f)$ の不変成分 D に対して $\partial D = J(f)$ が成り立つとする．このとき D は完全不変成分となる．

証明．f の次数を d，D における f の局所次数を k とする．$\eta \in \partial D$ を分岐点の軌道に含まれないものとし，$\varphi^{-1}(\eta)$ の元の個数を t とする．$f^{-1}(\eta)$ は異なる d 個の点 $\{\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_d\}$ からなるが，各 $\varphi^{-1}(\zeta_i)$ の元の個数を t_i とすれば，$t_i \leq t$ となる．さらに η をうまくとれば，すべての i に対して $t = t_i$ とできる．$(f \circ \varphi)^{-1}(\eta)$ の元の個数は dt であり，$(\varphi \circ h)^{-1}(\eta)$ の元の個数は tk であるから，$k = d$ を得る．■

さて，ジュリア集合の点は必ずしもファトウ成分の境界にあるとは限らない．そこで，$J(f)$ の点で $F(f)$ のいかなる成分の境界にもないものの集合を $J_0(f)$ とする．

定理6． $J_0(f) = \emptyset$ である必要十分条件は $F(f)$ が完全不変成分をもつかまたは，ちょうど二つの成分からなるかのいずれかである．

証明は [3] を参照．

反発周期点の集合はジュリア集合の中で稠密であるが，不変成分の境界についても次のことがいえる．

定理7． f を subhyperbolic とし，D を $F(f)$ の単連結不変成分とする．このとき，以下の集合は ∂D で稠密となる．

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\zeta \in \partial D \mid \zeta \text{は } f \text{ の周期点}\} \\
A_2 &= \{\zeta \in \partial D \mid \zeta \text{の軌道は } \partial D \text{ で稠密となる}\} \\
A_3 &= \{\zeta \in \partial D \setminus (\cup_{n \geq 0} f^{-n}(A_1)) \mid \zeta \text{の軌道は } \partial D \text{ で稠密とならない}\}
\end{aligned}$$

証明．$z = e^{2\pi i t}$, $(0 \leq t < 1)$ に対して

$$t = \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \frac{a_3}{k^3} + \cdots \qquad (a_i = 0, 1, \cdots, k-1)$$

とし，k 個の記号列空間 Σ_k への写像を

$$\phi(z) = (a_1 a_2 a_3 \cdots)$$

と定義し，Σ_k 上の推移写像を σ とすると

$$\phi \circ h = \sigma \circ \phi$$

が成り立つ．いま

$$\begin{aligned} B_1 &= \{z \in S^1 \mid z\text{は } h \text{ の周期点}\} \\ B_2 &= \{z \in S^1 \mid z\text{の軌道は } S^1 \text{ で稠密となる}\} \\ B_3 &= \{z \in S^1 \setminus (\cup_{n \geq 0} h^{-n}(B_1)) \mid z\text{の軌道は } S^1 \text{ で稠密とならない}\} \end{aligned}$$

とする．$z \in B_1$ であれば $\phi(z)$ は周期的であり，$z \in B_2$ であれば $\phi(z)$ は任意の有限列を含み，$z \in B_3$ であれば $\phi(z)$ は適当な有限列を含まない．また，逆も成り立つ．したがって，各 B_i は S^1 で稠密であることがわかる．補題 4 により $\varphi(B_i) = A_i$ となる．■

実際，S^1 上の h の n 周期点は

$$\exp\{\frac{t}{k^n - 1} 2\pi i\} \qquad (0 \leq t \leq k^n - 2)$$

で与えられるが，さらに f の周期点との関係について次が示されている．

補題 8． ([2]) f の周期点 ζ に対して $\varphi^{-1}(\zeta)$ の各元は h について同じ周期をもつ．

2. Examples

例 1． $z^3 - 1 = 0$ のニュートン函数

$$f(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2}$$

を考える．f の不動点は $1, \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2, \infty$ であり，分岐点は $1, \omega, \omega^2, 0$ である．したがって，$1, \omega, \omega^2$ は超吸引不動点となり，$f(0) = \infty$ であるから f は subhyperbolic である．いま，z を含むファトウ集合の成分を F_z と書くことにする．宍倉 ([4]) によりニュートン函数のジュリア集合は常に連結であることが示されている．したがって $F_1, F_\omega, F_{\omega^2}$ はすべて単連結な不変成分である．

定理 9． $F(f)$ の各成分の境界は Jordan curve である．

まず次の補題を準備する．

補題１０． D, E を $F(f)$ の不変成分とする．もし $(\overline{D})^c$ の成分 A で $A \supset E \cup f^{-1}(E)$ となるものが存在するのであれば $A = (\overline{D})^c$ となる．

証明． B を $(\overline{D})^c$ の成分で $B \neq A$ とする． $f(B) \cap A \neq \emptyset$ であれば $f(B) \supset A$ となる．このとき $F(f)$ の成分 $E' \subset B$ で $f(E') = E$ となるものが存在するが，これは仮定に矛盾する．したがって $f(B) \cap A = \emptyset$，すなわち $f^{-1}(A) \subset A$ である． $\zeta \in J(f) \cap A$ をとると，

$$J(f) = \overline{\cup_{n \geq 0} f^{-n}(\zeta)} \subset \overline{A}$$

となり $A = (\overline{D})^c$ を得る．■

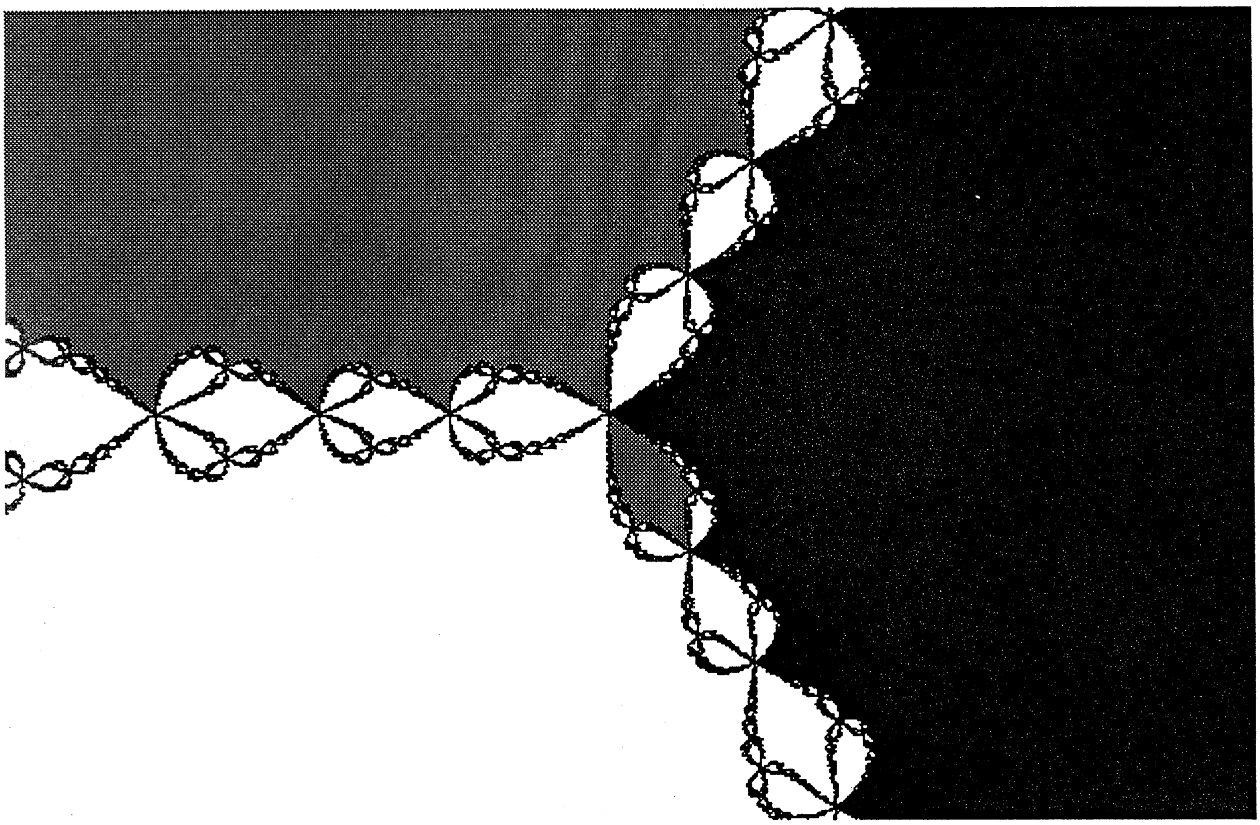

図 1

定理９の証明． 各不変成分は単連結であり，ただひとつの分岐点を含むので局所次数は２である．無限遠点はジュリア集合上にあるただひとつの不動点であるから，それは各不変成分の境界上にある． $h(z) = z^2$ は S^1 上にただひとつの不動点をもつ．いま， $z = 1, \omega, \omega^2$ とし， φ_z を F_z に関する補題２の φ とする．補題８より

$$\sharp\{\varphi_z^{-1}(\infty)\} = 1$$

となり，さらに補題２より

$$\sharp\{\varphi_z^{-1}(0)\} = 1$$

を得る．一方 $f^{-1}(F_z)$ の成分で F_z と異なるものはただひとつであり，それを F'_z とおく．

$$0 \in \partial F_z \qquad\qquad 0 \in \partial F'_z$$

である．

∂F_1 が Jordan curve であることを示す．$(\overline{F_1})^c$ の成分で境界に 0 を含むものはただひとつである．それを A とすると，上のことより $F_\omega \cup f^{-1}(F_\omega) \subset A$ となる（図 1 参照）．補題１０により ∂F_1 が Jordan curve であることが示される．

F_ω, F_{ω^2} についても同様に示される．さらにこれらの逆像についてもその境界は Jordan curve となる．■

例２．

$$f(z) = z^2 + c \qquad\qquad (c^3 + 2c^2 + 2c + 2 = 0, \quad c \in \mathbf{R})$$

とする．$c = -1.543689\cdots$ である．f の不動点を $p < 0 < q$ とすると，$p = -0.839286\cdots$, $q = 1.83929\cdots$ である．このとき

$$f(0) = c \qquad f(c) = -p \qquad f(-p) = p$$

であり，分岐点は $0, \infty$ であるから f は subhyperbolic である．$J(f)$ は連結であり，$F(f)$ はただひとつの成分からなる．この様な $J(f)$ は樹形突起と呼ばれる（図 2）．いま，$L = [-q, q]$ とおくと $L \subset J(f)$ であり，

$$J(f) = \overline{\cup_{n\geq 0} f^{-n}(L)}$$

となる（図 3 参照）．ここで $J(f) \setminus (\cup_{n\geq 0} f^{-n}(L)) \neq \emptyset$ に注意しておく．

定理１１．

1. $z \in B(q) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(q)$ であれば $\sharp\{\varphi^{-1}(z)\} = 1$ となる．
2. $z \in B(0) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(0)$ であれば $\sharp\{\varphi^{-1}(z)\} = 4$ となる．
3. $z \in B(L) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(L) \setminus (B(q) \cup B(0))$ であれば $\sharp\{\varphi^{-1}(z)\} = 2$ となる．
4. $z \in J(f) \setminus (B(0) \cup B(L))$ であれば $\sharp\{\varphi^{-1}(z)\} = 1$ となる．

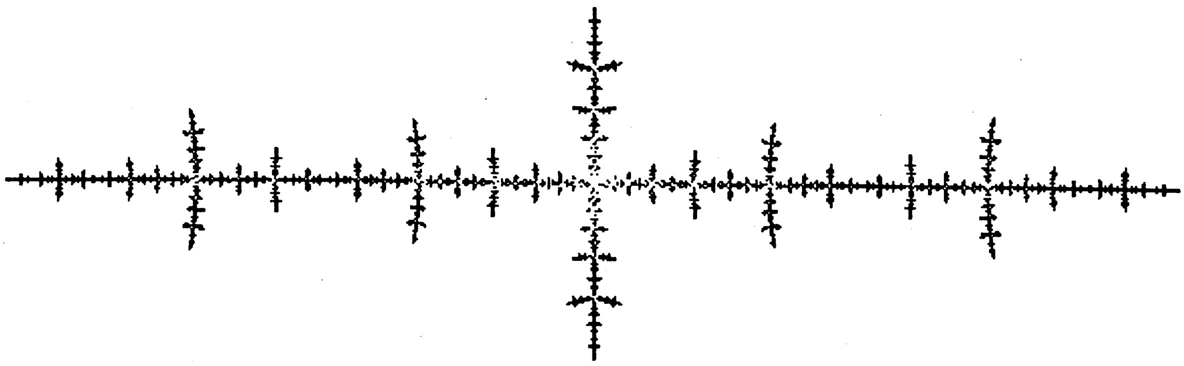

図 2

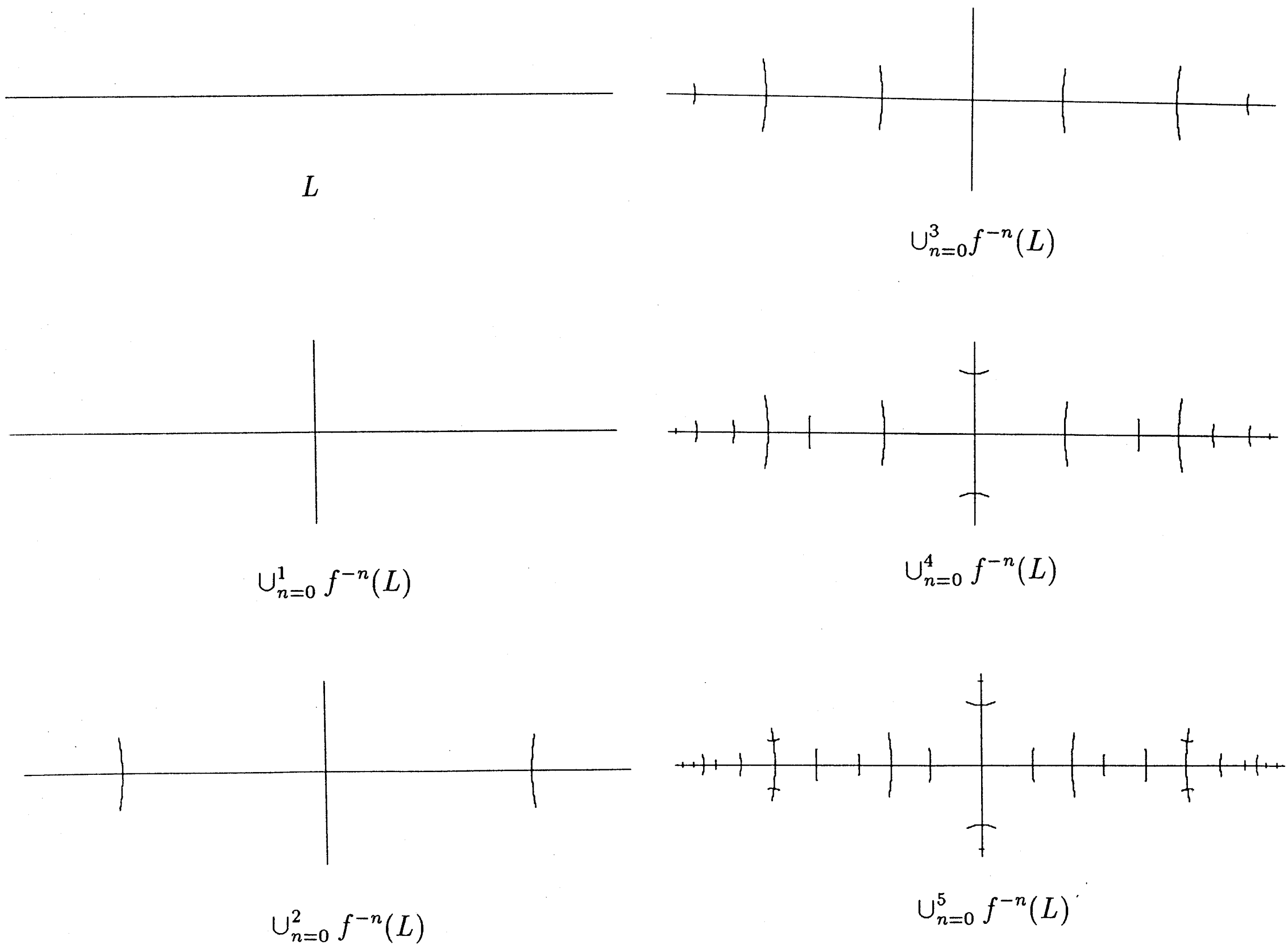

図 3

証明． 以下 S^1 上の点 $e^{2\pi it}$ と $t \pmod 1$ を同一視する．$z \in L \setminus \{\pm q\}$ に対して $\varphi^{-1}(z)$ の元の個数は少なくとも 2 個である．したがって，補題 8 より

$$\varphi^{-1}(q) = \{0\}$$

となり，さらに補題 2 より 1. を得る．

また $h(z) = z^2$ の 2 周期系は $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ だけであり，$f(z)$ の 2 周期系もただひとつで，それは L 上にある．そこで，補題 8 より

$$\varphi^{-1}(p) = \{\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}\}$$

を得る．さらに

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(-p) &= \{\frac{1}{6}, \quad \frac{5}{6}\}\\ \varphi^{-1}(c) &= \{\frac{5}{12}, \quad \frac{7}{12}\}\\ \varphi^{-1}(0) &= \{\frac{5}{24}, \quad \frac{7}{24}, \quad \frac{17}{24}, \quad \frac{19}{24}\}\end{aligned}$$

となる（図 4 参照）．したがって補題 2 より 2. を得る．

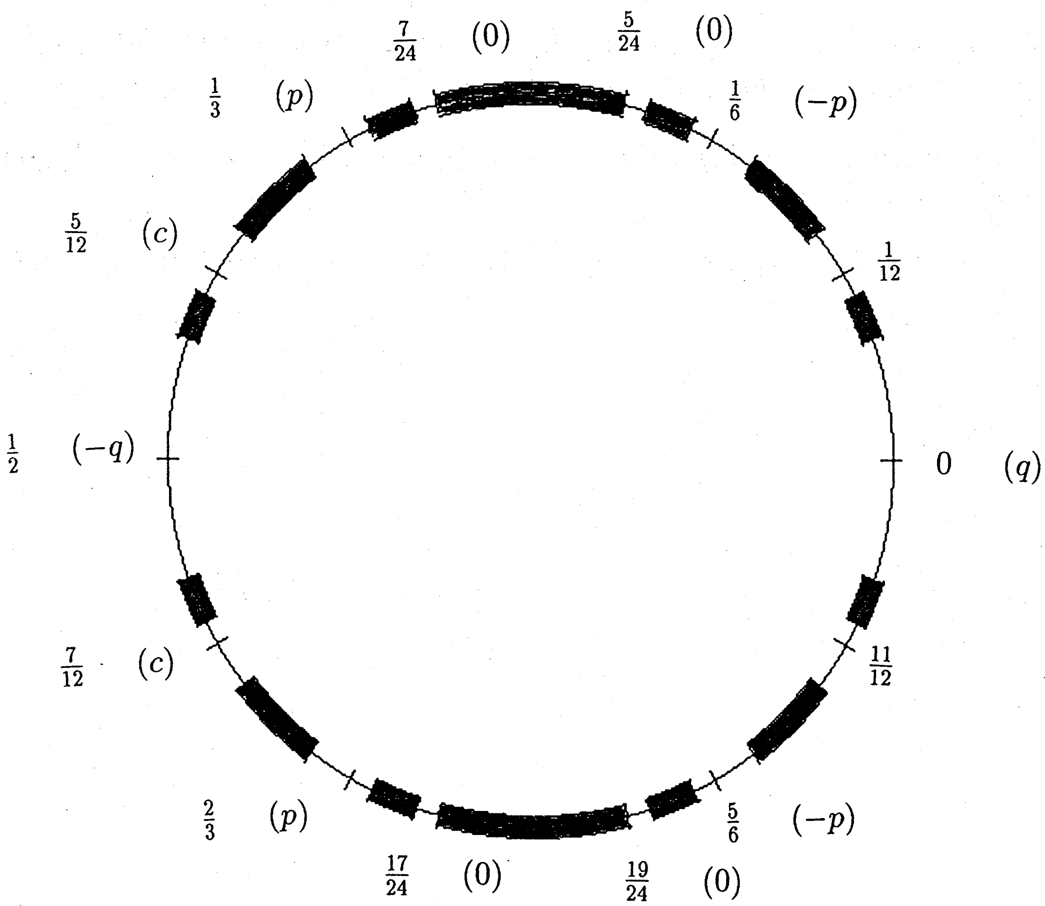

図 4

ここで，S^1 上の開弧 T_1, T_2 を $T_1 = (\frac{5}{24}, \frac{7}{24})$, $T_2 = (\frac{17}{24}, \frac{19}{24})$ とし，$h^{-n}(T_i)$, $(n \geq 0,\ \ i = 1,2)$ の各成分を trema と呼ぶ．A, B を tremas とすると $A \subset B$, $A \supset B$, または $A \cap B = \emptyset$ が成立する．

$$W = S^1 \setminus (((\cup_{n \geq 0} h^{-n}(T_1)) \cup (\cup_{n \geq 0} h^{-n}(T_2)))$$

とおくと W は内点をもたず，さらに

$$\varphi(W) = L$$

となる．したがって $z \in L \setminus (B(q) \cup B(0))$ に対して $\sharp\{\varphi^{-1}(z)\} = 2$ を得る．さらに補題2より 3. を得る．

さて，$z \in S = J(f) \setminus (B(0) \cup B(L) \cup B(q))$ であれば $\varphi^{-1}(z)$ は trema に含まれる．いま，$t, s \in \varphi^{-1}(z)$, $t \neq s$ とする．ところが $h^{-n}(T_i)$ の成分の長さは $n \to \infty$ としたとき 0 に収束するので，互いに交わらない二つの trema A, B で $t \in A$, $s \in B$ となるものがとれが，これは矛盾である．したがって 4. を得る．■

参考文献

[1] L. Carleson & T. H. Gamelin, Complex Dynamics, Springer-Verlag, 1993.

[2] L. R. Goldberg & J. Milnor, Fixed points of polynomial maps. Part II. Fixed point portraits, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 26(1993), 51-98.

[3] S. Morosawa, On the residual Julia sets of rational functions, to appear in Ergod. Th. & Dynam. Sys.

[4] M. Shishikura, The connectivity of the Julia set and fixed point, IHES preprint.